Correction Devoir surveillé n°2B

Exercice 1 - Inspiré HEC 2019

1. Dans cette question, on considère les matrices $C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $L = [1, 2, -1] \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ et le produit matriciel $M = CL$.

   (a) i. Un calcul matriciel direct donne :

$$\boxed{M = CL = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M^2 = 0_3.}$$

   ii. On résout le système

$$M \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 0 & = 0 \\ x + 2y - z & = 0 \\ 2x + 4y - 2z & = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 0 & = 0 \\ x + 2y - z & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases} \quad L_3 - 2L_2 \to L_3$$

$$\iff \begin{cases} 0 & = 0 \\ x & = z - 2y \\ 0 & = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } S = \left\{ \begin{pmatrix} z - 2y \\ y \\ z \end{pmatrix}, (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

   (b) i. On applique la méthode du pivot de Gauss à la matrice $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\left.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \right| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \right| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\left.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 2L_2 + L_3 \to L_3$$

$$\boxed{\text{La matrice } P \text{ est donc inversible et son inverse est } P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.}$$

On calcule ensuite le produit

$$\boxed{P \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.}$$

ii. Soit $M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$. On a

$$M \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \iff M \begin{bmatrix} a \\ d \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Posons alors

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Cette matrice à une diagonale non nulle et devrait donc être inversible. On le vérifie avec la méthode de Gauss.

$$\begin{array}{c|cl}
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{r} \\ 2L_1 - L_2 \to L_2 \\ L_1 + L_3 \to L_3 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{r} L_1 - L_2 \to L_1 \\ \\ L_2 - L_3 \to L_3 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{r} L_1 + L_3 \to L_1 \\ L_2 - 2L_3 \to L_2 \\ \\ \end{array}
\end{array}$$

La matrice R est donc inversible et

$$R^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

On pose donc

$$\boxed{Q = {}^tR^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}}$$

iii. On a

$$\begin{aligned} PMQ &= PCLQ \\ &= PC[1,0,0] \\ &= P\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

En conclusion,

$$\boxed{PMQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

2. La fonction Scilab suivante permet de multiplier la i-ème ligne L_i d'une matrice A par un réel sans modifier ses autres lignes, c'est-à-dire de lui appliquer l'opération élémentaire $L_i \leftarrow aL_i$ (où $a \neq 0$).

```
function B=multlig(a,i,A)
    [n,p] = size(A)
    B = A
    for j=1:p
        B(i,j)=a*B(i,j)
    end
endfunction
```

(a) On propose les programmes suivants :

```
function B=addlig(b,i,j,A)
    [n,p] = size(A)
    B = A
    for k = 1:p
        B(i,k) = A(i,k)+b*A(j,k)
    end
endfunction
```

et

```
function B=echlig(i,j,A)
    [n,p] = size(A)
    B = A
    for k=1:p
        B(i,k) = A(j,k)
        B(j,k) = A(i,k)
    end
endfunction
```

(b) La matrice D est une matrice diagonale avec des 1 partout sur la diagonale sauf à l'entrée (i,i) qui vaut a. On sait alors (ou on le vérifie à l'aide de la formule du produit matriciel) que multiplier A par D à gauche (à droite, respectivement) revient à multiplier la i-ème ligne (colonne, respectivement) de A par a.
Ainsi,

$$\boxed{\text{le programme } \texttt{multligmat effectue bien l'opération } L_i \leftarrow aL_i\texttt{.}}$$

3. Dans cette question, on note n un entier supérieur ou égal à 2 et M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie la propriété suivante : Il existe une matrice-colonne non nulle $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et d'une matrice-ligne non nulle $L = [\ell_1, \dots, \ell_n] \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telles que $M = CL$
Pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé à l'intersection de sa i-ème ligne et de sa j-ème colonne, qui vaut 1.
   (a) i. On a

$$\begin{aligned} MC &= CLC \\ &= C\left(\sum_{i=1}^{n} \ell_i c_i\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} \ell_i c_i\right) C \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien le résultat en posant } \lambda = \sum_{i=1}^{n} \ell_i c_i.}$$

ii. On a $M = \begin{bmatrix} c_1\ell_1 & c_1\ell_2 & \dots & c_1\ell_n \\ c_2\ell_1 & c_2\ell_2 & \dots & c_2\ell_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n\ell_1 & c_n\ell_2 & \dots & c_n\ell_n \end{bmatrix}$. On résout alors

$$MX = 0 \iff \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} c_1\ell_i x_i & = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} c_2\ell_i x_i & = 0 \\ \vdots & = \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} c_n\ell_i x_i & = 0 \end{cases}$$

La matrice C étant non nulle, il existe un $k \in \mathbb{N}$, tel que $c_k \neq 0$. Dans le système précédent, on effectue alors les changements de lignes : $\forall j \neq k$,

$$c_k L_j - c_j L_k \to L_j$$

Cela donne alors

$$MX = 0 \iff \begin{cases} 0 & = 0 \\ \vdots & = \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} c_k\ell_i x_i & = 0 \\ \vdots & = \vdots \\ 0 & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 & = 0 \\ \vdots & = \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} \ell_i x_i & = 0 \\ \vdots & = \vdots \\ 0 & = 0 \end{cases}$$

Or, comme L est différent du vecteur nul, il existe un $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $\ell_j \neq 0$. Ainsi

$$\sum_{i=1}^{n} \ell_i x_i = 0 \iff x_j = \frac{-1}{\ell_j} \sum_{i \neq j} \ell_i x_i$$

Donc l'ensemble des solutions est

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{j-1} \\ \dfrac{-1}{\ell_j} \displaystyle\sum_{i \neq j} \ell_i x_i \\ x_{j+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \right\}$$

Exercice 2 - Inspiré ESC 2001

On considère la fonction f définie sur [0 ; 1] par $f(x) = 2xe^x$

1. f est dérivable sur $[0,1]$ en tant que produit de fonctions sur $[0,1]$ et
$$f'(x) = 2(x+1)e^x > 0.$$
f est donc continue et strictement croissante sur $[0,1]$ donc bijective de $[0,1]$ dans $f[0,1] = [0,2e]$
On a donc

x	0	1
Variations de f	0 $\nearrow$	$2e$

et d'après le théorème de la bijection, f^{-1} est croissante,

x	0	$2e$
Variations de f^{-1}	0 $\nearrow$	1

2. Sur l'intervalle $[0,1]$ pour que f soit définie. : "$\alpha e^\alpha = 1$" $\Leftrightarrow$ "$f(\alpha) = 2$" et comme f est bijective de $[0,1]$ dans $[0,2e]$ et que $2 \in [0,2e]$,
$$\boxed{\text{l'équation a une unique solution sur } [0,1].}$$
Et comme $f(0) = 0$,
$$\boxed{0 \text{ n'est pas solution et } \alpha \neq 0.}$$
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \end{cases}$$

3. On montre par récurrence les propriétés suivantes $\mathscr{P}_n$: $\{u_n$ existe et $u_n \in]0,1]\}$.

— **Initialisation :** La propriété $\mathscr{P}_0$ s'écrit "u_0 existe et $u_0 \in]0,1]$" or $u_0 = \alpha \in]0,1]$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie d'après la question 2.

— **Hérédité :** On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vrai pour un certain rang n. Donc $u_n \in]0,1]$ or f^{-1} est défini sur $]0,2e]$ donc u_{n+1} est bien défini. De plus, $f^{-1}(]0,2e]) =]0,1]$ donc $f^{-1}(u_n) \in]0,1]$ La proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition $(\mathscr{P}_n)$ est héréditaire.

— **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ existe et } u_n \in]0,1].}$

4. Soit $x \in]0,1]$. On a

$$\begin{aligned} 2e^x > 1 &\iff 2xe^x > x \\ &\iff \boxed{f(x) - x > 0} \end{aligned}$$

Si $x = 0$, on a bien l'égalité.

5. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} f(u_n) - u_n > 0 &\iff f(u_n) > u_n \\ &\iff u_n > f^{-1}(u_n) \quad \text{La fonction } f^{-1} \text{ est croissante} \\ &\iff u_n > u_{n+1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement décroissante.}}$$

6. On pose pour tout entier naturel n : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$

(a) On a pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} u_{n+1} = f^{-1}(u_n) &\iff f(u_{n+1}) = u_n \\ &\iff 2u_{n+1}e^{u_{n+1}} = u_n \\ &\iff \boxed{u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n e^{-u_{n+1}}} \end{aligned}$$

(b) On montre par récurrence les propriétés suivantes $\mathscr{P}_n : \left\{u_n = \frac{e^{-S_n}}{2^n}\right\}$.

— **Initialisation :** La propriété $\mathscr{P}_0$ s'écrit "$u_0 = \frac{e^{-u_0}}{2^0} \iff u_0 e^{u_0} = 1$". Or d'après la question 2, l'équation $xe^x = 1$ n'admet qu'une unique solution α donc $u_0 = \alpha$ et ainsi $\mathscr{P}_0$ est vraie.

— **Hérédité :** On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vrai pour un certain rang n. Donc

$$u_n = \frac{e^{-S_n}}{2^n}$$

Or,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{2}u_n e^{-u_{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{e^{-S_n}}{2^n} e^{-u_{n+1}} \\ &= \frac{e^{-S_n - u_{n+1}}}{2^{n+1}} \\ &= \frac{e^{-S_{n+1}}}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

La proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition $(\mathscr{P}_n)$ est héréditaire.

— **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{e^{-S_n}}{2^n}.}$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est une somme de termes positifs donc $e^{-S_n} \leq 1$. Ainsi,

$$\boxed{u_n \leq \left(\tfrac{1}{2}\right)^n.}$$

(d) Comme $\dfrac{1}{2} \leq 1$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

De plus, $0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Donc d'après le théorème des gendarmes, la suite (u_n) converge et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$

Problème - Inspiré EDHEC 2017

Partie 1 : étude d'une variable aléatoire

Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3, et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4 et le sommet 4 au sommet 1.
Un mobile se déplace aléatoirement sur les sommets de ce carré selon le protocole suivant :
• Au départ, c'est à dire à l'instant 0, le mobile est sur le sommet 1.
• Lorsque le mobile est à un instant donné sur un sommet, il se déplace à l'instant suivant sur l'un quelconque des trois autres sommets, et ceci de façon équiprobable.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se situe le mobile à l'instant n. D'après le premier des deux points précédents, on a donc $X_0 = 1$.

1. Le mobile étant au sommet 1 au départ, à l'instant suivant le mobile peut arriver sur les trois autres sommets donc $X_1(\Omega) = [\![2, 4]\!]$. Comme chaque case est équiprobable,

$$\boxed{\forall k \in [\![2, 4]\!], \quad P(X_1 = k) = \frac{1}{3}}$$

On en déduit : $E(X_1) = 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{3}$, d'où :

$$\boxed{E(X_1) = 3.}$$

2. Les évènements $(X_1 = 2, X_1 = 3, X_1 = 4)$ forment un système complet d'évènement. En appliquant la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned}
P(X_2 = 1) &= \sum_{j=2}^{4} P(X_1 = j) P_{X_1=j}(X_2 = 1) \\
&= \sum_{j=2}^{4} \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \\
&\boxed{= \frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

On a également

$$\begin{aligned}
P(X_2=2) &= \sum_{j=2}^{4} P(X_1=j)P_{X_1=j}(X_2=2) \\
&= P(X_1=2)P_{X_1=2}(X_2=2)+P(X_1=3)P_{X_1=3}(X_2=2)+P(X_1=4)P_{X_1=4}(X_2=2) \\
&= \frac{1}{3}\times 0+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3} \\
&\boxed{=\frac{2}{9}}
\end{aligned}$$

De la même façon,

$$\boxed{P(X_2=2)=P(X_2=3)=P(X_2=4)=\frac{2}{9}}$$

3. À l'instant 1, on a trois options :
   - Le mobile est sur le sommet 2 et à l'instant 2 , il peut aller sur l'un des sommets 1,3 ou 4
   - Le mobile est sur le sommet 3 et à l'instant 2 , il peut aller sur l'un des sommets 1,2 ou 4
   - Le mobile est sur le sommet 4 et à l'instant 2 , il peut aller sur l'un des sommets 1,2 ou 3

   On a donc $X_2(\Omega)=[\![1,4]\!]$ Le même processus se reproduit ensuite : à partir de l'instant 2, le mobile peut se trouver sur n'importe quel sommet. On a donc :

$$\boxed{\forall n\geq 2, X_n(\Omega)=[\![1,4]\!]}$$

4. (a) 3) a) Pour n supérieur ou égal à 2, la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $(X_n=k)_{k\in[1,4]}$, chacun étant de probabilité non nulle, s'écrit :

$$P\left(X_{n+1}=1\right)=\sum_{i=1}^{4} P\left(X_n=i\right) P_{\left(X_n=i\right)}\left(X_{n+1}=1\right)$$

D'après les conditions du voyage, le mobile se dirige vers un autre sommet que celui où il se trouve, et ceci de façon équiprobable donc on a :

$$P_{\left(X_n=i\right)}\left(X_{n+1}=1\right)=\begin{cases}\frac{1}{3} \text{ si } 2\leq i\leq 4\\ 0 \text{ si } i=1\end{cases}$$

Il reste alors $P\left(X_{n+1}=1\right)=\displaystyle\sum_{i=2}^{4} P\left(X_n=i\right)\times\frac{1}{3}$, ce qui s'écrit :

$$\boxed{P\left(X_{n+1}=1\right)=\tfrac{1}{3}\left(P\left(X_n=2\right)+P\left(X_n=3\right)+P\left(X_n=4\right)\right)}$$

(b) Pour $n=0$, l'égalité précédente est correcte puisqu'elle fournit

$$\begin{aligned}
P\left(X_1=1\right) &= \frac{1}{3}\left(P\left(X_0=2\right)+P\left(X_0=3\right)+P\left(X_0=4\right)\right) \\
&= \frac{1}{3}(0+0+0) \\
&\boxed{=0}
\end{aligned}$$

Pour $n=1$, l'égalité précédente est correcte puisqu'elle fournit :

$$\begin{aligned}P\left(X_2=1\right)&=\frac{1}{3}\left(P\left(X_1=2\right)+P\left(X_1=3\right)+P\left(X_1=4\right)\right)\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)\\&\boxed{=\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

(c) Pour $n \geqslant 2$, les évènements $(X_n=1, X_n=2, X_n=3, X_n=4)$ forment un système complet d'évènements, on a

$$\boxed{P(X_n=1)+P(X_n=2)+P(X_n=3)+P(X_n=4)=1}$$

Pour $n=1$, on a $P\left(X_1=1\right)=0 \quad P\left(X_1=2\right)=P\left(X_1=3\right)=P\left(X_1=4\right)=\frac{1}{3}$ donc on a encore $P\left(X_1=1\right)+P\left(X_1=2\right)+P\left(X_1=3\right)+P\left(X_1=4\right)=1$

Pour $n=0$, on a $P\left(X_0=1\right)=1, P\left(X_0=2\right)=P\left(X_0=3\right)=P\left(X_0=4\right)=0$ donc on a encore $P\left(X_1=1\right)+P\left(X_1=2\right)+P\left(X_1=3\right)+P\left(X_1=4\right)=1$ Dans tous les cas, on a bien :

$$\boxed{P(X_n=1)+P(X_n=2)+P(X_n=3)+P(X_n=4)=1}$$

On en déduit que $P\left(X_n=2\right)+P\left(X_n=3\right)+P\left(X_n=4\right)=1-P\left(X_n=1\right)$, et en remplaçant dans l'égalité de la question 3 a) donnant $P\left(X_{n+1}=1\right)$, on obtient :

$$P\left(X_{n+1}=1\right)=\frac{1}{3}\left(1-P\left(X_n=1\right)\right)$$

On a donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad P(X_{n+1}=1)=-\frac{1}{3}P(X_n=1)+\frac{1}{3}}$$

(d) On reconnait que la suite $\left(P\left(X_n=1\right)\right)_{n \geq 2}$ est arithmético-géométrique. Soit donc x le réel vérifiant l'égalité $x=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$: on a $x=\frac{1}{4}$. On pose $v_n=P\left(X_n=1\right)-\frac{1}{4}$ et on trouve alors :

$$\begin{aligned}v_{n+1}&=P\left(X_{n+1}=1\right)-\frac{1}{4}\\&=-\frac{1}{3}P\left(X_n=1\right)+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\\&=-\frac{1}{3}P\left(X_n=1\right)+\frac{1}{12}\end{aligned}$$

Mais $P\left(X_n=1\right)=v_n+\frac{1}{4}$ donc : $v_{n+1}=-\frac{1}{3}\left(v_n+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{12}=-\frac{1}{3}v_n$ La suite $\left(v_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $-\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0=P\left(X_0=1\right)-\frac{1}{4}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$, ce qui implique, d'après le cours :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n=\frac{3}{4} \times\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

Comme $P\left(X_n=1\right)=v_n+\frac{1}{4}$, on en déduit :

$$\boxed{\forall n \geq 2, P\left(X_n=1\right)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$$

Remarque : On pouvait aussi procéder par récurrence, mais il faut connaitre la technique ci-dessus au cas où le résultat ne soit pas donné.

Remarque :

On pouvait aussi soustraire membre à membre les deux égalités

$$\begin{cases} P\left(X_{n+1}=1\right)=-\dfrac{1}{3}P\left(X_n=1\right)+\dfrac{1}{3} \\ \qquad\qquad\quad x=-\dfrac{1}{3}x \quad +\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

On obtenait alors : $P\left(X_{n+1}=1\right)-x=-\frac{1}{3}\left(P\left(X_n=1\right)-x\right)$, c' est-à-dire $v_{n+1}=-\frac{1}{3}v_n$ puis on terminait de la même manière.

5. (a) Pour n supérieur ou égal à 2, la formule des probabilités totales associée au même système complet d'événements, s'écrit :

$$P\left(X_{n+1}=2\right)=\sum_{i=1}^{4}P\left(X_n=i\right)P_{\left(X_n=i\right)}\left(X_{n+1}=2\right)$$

D'après les conditions du voyage, on a

$$P_{\left(x_n=i\right)}\left(X_{n+1}=2\right)=\begin{cases} \frac{1}{3} \text{ si } i\in\{1,3,4\} \\ 0 \text{ si } i=2 \end{cases}$$

et il reste : $\forall n\geq 2, P\left(X_{n+1}=2\right)=\frac{1}{3}\left(P\left(X_n=1\right)+P\left(X_n=3\right)+P\left(X_n=4\right)\right)$ On vérifie que cette égalité reste valable pour $n=0$ et $n=1$, ce qui prouve que :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, P\left(X_{n+1}=2\right)=\frac{1}{3}\left(P\left(X_n=1\right)+P\left(X_n=3\right)+P\left(X_n=4\right)\right)}$$

(b) Pour $n\geq 2$, toujours avec le système complet d'événements $\left(X_n=k\right)_{k\in[1,4]}$, on peut cette fois écrire que $P\left(X_n=1\right)+P\left(X_n=3\right)+P\left(X_n=4\right)=1-P\left(X_n=2\right)$ et en remplaçant dans $P\left(X_{n+1}=2\right)$, on obtient : $P\left(X_{n+1}=2\right)=\frac{1}{3}\left(1-P\left(X_n=2\right)\right)$ On a donc :
On vérifie aussi que cette égalité reste valable pour $n=0$ et $n=1$, ce qui donne :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, P\left(X_{n+1}=2\right)=-\frac{1}{3}P\left(X_n=2\right)+\frac{1}{3}}$$

(c) On reconnait que la suite $\left(P\left(X_n=2\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique mais cette fois, la suite $\left(P\left(X_n=2\right)-\frac{1}{4}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$ et de premier terme

$$P\left(X_0=2\right)-\frac{1}{4}=0-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4},$$

ce qui implique :

$$\forall n\in\mathbb{N}, P\left(X_n=2\right)-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

On trouve donc :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, P\left(X_n=2\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$$

6. On admet que, pour tout entier naturel n, on a :

$$P(X_{n+1}=3)=-\frac{1}{3}P(X_n=3)+\frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P(X_{n+1}=4)=-\frac{1}{3}P(X_n=4)+\frac{1}{3}$$

En admettant que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on ait

$$P\left(X_{n+1}=3\right)=-\frac{1}{3}P\left(X_n=3\right)+\frac{1}{3}$$

et

$$P\left(X_{n+1}=4\right)=-\frac{1}{3}P\left(X_n=4\right)+\frac{1}{3},$$

alors les suites $\left(P\left(X_n=3\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(P\left(X_n=4\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient la même relation de récurrence liant deux termes consécutifs que la suite $\left(P\left(X_n=2\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, et ont le même premier terme, à savoir :

$$P\left(X_0=3\right)=P\left(X_0=4\right)=0=P\left(X_0=2\right)$$

Par conséquent, ces trois suites sont égales, ce qui justifie que :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, P\left(X_n=3\right)=P\left(X_n=4\right)=\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}\left(-\tfrac{1}{3}\right)^n}$$

7. La variable X_n est finie donc elle possède une espérance et celle-ci est :

$$\begin{aligned}
E\left(X_n\right)&=1\times P\left(X_n=1\right)+2\times P\left(X_n=2\right)+3\times P\left(X_n=3\right)+4\times P\left(X_n=4\right)\\
&=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n+2\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)+3\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)+4\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)\\
&=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}+\frac{4}{4}+\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n-\frac{2}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n-\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n-\frac{4}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\\
&=\frac{10}{4}-\frac{6}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n
\end{aligned}$$

Bilan :

$$\boxed{E\left(X_n\right)=\tfrac{5}{2}-\tfrac{3}{2}\left(-\tfrac{1}{3}\right)^n}$$

Partie 2 : calcul des puissances d'une matrice A

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on considère la matrice-ligne de $\mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R})$:

$$U_n=\begin{pmatrix}P(X_n=1) & P(X_n=2) & P(X_n=3) & P(X_n=4)\end{pmatrix}$$

8. (a) 7) a) Pour tout entier naturel n, on a :

$$U_nA=\frac{1}{3}\left(P\left(X_n=1\right)P\left(X_n=2\right)P\left(X_n=3\right)P\left(X_n=4\right)\right)\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$$

En effectuant ce produit matriciel, on obtient une matrice ligne dont :

— Le 1$^{\text{er}}$ élément est $\frac{1}{3}\left(P\left(X_n=2\right)+P\left(X_n=3\right)+P\left(X_n=4\right)\right)$

— Le 2$^{\text{ème}}$ élément est $\frac{1}{3}\left(P\left(X_n=1\right)+P\left(X_n=3\right)+P\left(X_n=4\right)\right)$

— Le 3$^{\text{eme}}$ élément est $\frac{1}{3}\left(P\left(X_n=1\right)+P\left(X_n=2\right)+P\left(X_n=4\right)\right)$

— Le 4$^{\text{ème}}$ élément est $\frac{1}{3}\left(P\left(X_n=1\right)+P\left(X_n=2\right)+P\left(X_n=3\right)\right)$

D'après les questions 3 a), et 4 a , les deux premiers éléments sont $P(X_{n+1}=1)$ et $P(X_{n+1}=2)$. Sans refaire les calculs faits aux questions 3a) et 4a), on constate que les deux éléments suivants sont $P(X_{n+1}=3)$ et $P(X_{n+1}=4)$. On a donc :

$$U_nA=(P(X_{n+1}=1)\,P(X_{n+1}=2)\,P(X_{n+1}=3)\,P(X_{n+1}=4))=U_{n+1}$$

Bilan :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, U_{n+1}=U_nA}$$

(b) On montre par récurrence les propriétés suivantes $\mathscr{P}_n : \{U_n=U_0A^n\}$.

— **Initialisation :** La propriété $\mathscr{P}_0$ s'écrit "$U_0=U_0A^0$" or $A^0=I_4$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

— **Hérédité :** On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vrai pour un certain rang n. Donc $U_n=U_0A^n$. De plus, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned}U_{n+1}&=U_nA\\&=U_0A^n\times A\\&=U_0A^{n+1}\end{aligned}$$

La proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition $(\mathscr{P}_n)$ est héréditaire.

— **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N},\ U_n=U_0A^n.}$

(c) On connait U_n et on a $U_0=\begin{pmatrix}1&0&0&0\end{pmatrix}$, puisque X_0 est la variable certaine On en déduit par produit :

$$P(X_n=1)=a_1\quad P(X_n=2)=a_2\quad P(X_n=3)=a_3\quad P(X_n=4)=a_4$$

La première ligne (a_1,a_2,a_3,a_4) de A^n est donc :

$$\boxed{\begin{pmatrix}\frac14+\frac34\left(-\frac13\right)^n & \frac14-\frac14\left(-\frac13\right)^n & \frac14-\frac14\left(-\frac13\right)^n & \frac14-\frac14\left(-\frac13\right)^n\end{pmatrix}}$$

9. En plaçant le mobile au départ sur le sommet 2 , on a $U_0=\begin{pmatrix}0&1&0&0\end{pmatrix}$ et des calculs similaires à ceux faits aux questions 3) et 4) donnent cette fois :

$$P(X_n=1)=P(X_n=3)=P(X_n=4)=\frac14-\frac14\left(-\frac13\right)^n$$

et

$$P(X_n=2)=\frac14+\frac34\left(-\frac13\right)^n$$

Comme on a :

$$(P(X_n=1)\,P(X_n=2)\,P(X_n=3)\,P(X_n=4))=\begin{pmatrix}0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3&a_4\\b_1&b_2&b_3&b_4\\c_1&c_2&c_3&c_4\\d_1&d_2&d_3&d_4\end{pmatrix}$$

On en déduit par produit :

$$P(X_n=1)=b_1\quad P(X_n=2)=b_2\quad P(X_n=3)=b_3\quad P(X_n=4)=b_4$$

La deuxième ligne de A^n est donc :

$$\boxed{\begin{pmatrix} \frac14-\frac14\left(-\frac13\right)^n & \frac14+\frac34\left(-\frac13\right)^n & \frac14-\frac14\left(-\frac13\right)^n & \frac14-\frac14\left(-\frac13\right)^n \end{pmatrix}}$$

On trouve la troisième ligne de A^n en plaçant le mobile au départ sur le sommet 3, ce qui donne :

$$\boxed{\begin{pmatrix} \frac14-\frac14\left(-\frac13\right)^n & \frac14-\frac14\left(-\frac13\right)^n & \frac14+\frac34\left(-\frac13\right)^n & \frac14-\frac14\left(-\frac13\right)^n \end{pmatrix}}$$

On trouve la quatrième ligne de A^n en plaçant le mobile au départ sur le sommet 4, ce qui donne :

$$\boxed{\begin{pmatrix} \frac14-\frac14\left(-\frac13\right)^n & \frac14-\frac14\left(-\frac13\right)^n & \frac14-\frac14\left(-\frac13\right)^n & \frac14+\frac34\left(-\frac13\right)^n \end{pmatrix}}$$

Partie 3 : une deuxième méthode de calcul des puissances de A

On considère les matrices I et J suivantes : $I = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1 \end{pmatrix}$.

10. On a $A = \frac13 \begin{pmatrix} 0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0 \end{pmatrix}$ donc $A = \frac13 \begin{pmatrix} 1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1 \end{pmatrix} - \frac13 \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix}$ Conclusion :

$$\boxed{A = -\frac{1}{3}I + \frac{1}{3}J.}$$

11. (a) On a

$$J^2 = \begin{pmatrix} 1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4&4&4&4\\4&4&4&4\\4&4&4&4\\4&4&4&4 \end{pmatrix} = 4J$$

On montre par récurrence les propriétés suivantes $\mathscr{P}_n : \{J^n = 4^{n-1}J\}$.

— **Initialisation :** La propriété $\mathscr{P}_1$ s'écrit "$J = 4^{1-1}J$" or $4^{1-1} = 1$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

— **Hérédité :** On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vrai pour un certain rang n. Donc $J_n = 4^{n-1}J$. De plus, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned} J^{n+1} &= J^n J \\ &= 4^{n-1} J \times J \\ &= 4^{n-1} J^2 \\ &= 4^{n-1} \times 4 \times J \\ &= 4^n J \end{aligned}$$

La proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition $(\mathscr{P}_n)$ est héréditaire.

— **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ J^n = 4^{n-1}J.}$

(b) Comme les matrices I et J commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton, qui s'écrit, pour tout entier naturel n :

$$A^n = \left(\frac{1}{3}(J-I)\right)^n = \frac{1}{3^n}(J-I)^n = \frac{1}{3^n}\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}(-I)^{n-k}J^k = \frac{1}{3^n}\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}(-1)^{n-k}J^k$$

Pour n supérieur ou égal à 1, on isole le premier terme, car la relation $J^k = 4^{k-1}J$ n'est valable que pour $k \geq 1$. On a alors :

$$A^n = \frac{1}{3^n}\left((-1)^n J^0 + \sum_{k=1}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}(-1)^{n-k}J^k\right) = \frac{1}{3^n}\left((-1)^n I + \sum_{k=1}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}(-1)^{n-k}4^{k-1}J\right)$$

En mettant $\frac{1}{4}$ en facteur, on trouve : $A^n = \frac{1}{3^n}\left((-1)^n I + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}(-1)^{n-k}4^k J\right)$ On ajoute le terme d'indice 0 à la somme puis on l'enlève :

$$A^n = \frac{1}{3^n}\left((-1)^n I + \frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}4^k(-1)^{n-k} - (-1)^n\right)J\right)$$

On peut maintenant appliquer de nouveau la formule du binôme :

$$A^n = \frac{1}{3^n}\left((-1)^n I + \frac{1}{4}\left((4-1)^n - (-1)^n\right)J\right)$$

On trouve alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = \frac{1}{3^n}\left((-1)^n I + \frac{1}{4}\left[3^n - (-1)^n\right]J\right)$ Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n I + \frac{1}{4}\left[1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]J}$$

(c) Pour $n = 0$, cette relation reste valable puisqu'elle donne :

$$\boxed{A^0 = \left(-\frac{1}{3}\right)^0 I + \frac{1}{4}\left[1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^0\right]J = I + 0 \times J = I}$$

Partie 4 : informatique

12. (a) Compléter le script `Scilab` suivant pour qu'il affiche les 100 premières positions autres que celle d'origine, du mobile dont le voyage est étudié dans ce problème, ainsi que le nombre n de fois où il est revenu sur le sommet numéroté 1 au cours de ses 100 premiers déplacements (on pourra utiliser la commande `sum`).

```
A=[ ....... ] /3
x=grand(100,'markov',A,1)
n=.......
disp(x)
disp(n)
```

(b) Après avoir exécuté cinq fois ce script, les réponses concernant le nombre de fois où le mobile est revenu sur le sommet 1 sont : $n = 23$, $n = 28$, $n = 23$, $n = 25$, $n = 26$. En quoi est-ce normal ?